Стереометрија

1. Одредити површину квадра ако је однос дужина ивица тог квадра $1:2:5$, а дужина његове дијагонале је $5\sqrt{6}$.

2. Одредити растојање темена B од дијагонале AC_1 коцке $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ивице 1.

3. Ако је $ABCDA_1B_1C_1D_1$ коцка, одредити меру угла између правих AB_1 и AD_1.

4. Основа праве призме је троугао чије су две странице дужина 3 и 5, а угао између њих 120°. Ако је површина највеће бочне стране једнака 35, одреди површину омотача те призме.

5. Висина правилне четворостране пирамиде је подељена на 4 једнака дела и кроз деоне тачке су постављене равни паралелне основи. Ако је збир површина три добијена пресека једнак S, одредити површину основе те пирамиде.

6. Одредити површину и запремину правилног тетраедра ивице a.

7. Центри страна коцке ивице a, представљају темена правилног октаедра. Одредити површину и запремину тог октаедра.

8. Основа пирамиде је правоугаоник. Две бочне стране су нормалне на раван основе, а друге две образују са њом углове од 45° и 60°. Ако је висина пирамиде $H = 3\sqrt{3}\,\mathrm{cm}$, одредити запремину те пирамиде.

9. Ако је однос површине омотача правилне тростране пирамиде и површине њене основе $\sqrt{3}:1$, одредити косинус угла под којим је страна пирамиде нагнута према равни основе.

10. Одредити висину правог кружног ваљка коме је осни пресек квадрат, а запремина једнака 54π.

11. Одредити површину правог ваљка запремине V код кога је однос висине и полупречника основе једнак $4:1$.

12. У прав кружни ваљак уписана је правилна шестострана призма, а у призму је уписан ваљак. Одредити однос запремина та два ваљка.

13. Осни пресек праве купе висине $5\,\mathrm{cm}$ је правоугли троугао. Одредити површину те купе.

14. Омотач праве купе, у развијеном облику, представља кружни исечак са централним углом 36° и површином од $110\pi\,\mathrm{cm}^2$. Одредити површину и запремину те купе.

15. Прав ваљак и права купа имају заједничку основу. Врх купе је центар друге основе ваљка. Ако је однос висине ваљка и изводнице купе $12:13$, одредити однос површина ваљка и купе.

16. У праву купу полупречника основе R и висине $H = 2R$ уписан је прав ваљак. Колика је висина тако уписаног ваљка који има максималну површину омотача?

17. Осни пресек праве купе полупречника основе r је једнакостранични троугао. Раван α је паралелна основи купе и полови њену запремину. Одредити растојање од врха купе до равни α.

18. У праву купу полупречника $r = 5$ и висине $h = 12$ уписана је лопта. Одредити запремину те лопте.

19. У правилну тространу призму је уписана сфера тако да додирује све стране призме. Одредити однос површине призме и сфере.

20. Једнакостранични троугао ABC, странице a, ротира око праве која садржи теме A и паралелна је висини кроз теме B. Одредити површину и запремину тако добијеног ротационог тела.

21. Правоугли троугао чије су катете дужине a и b ротира око симетрале спољашњег угла правог угла троугла. Одредити запремину добијеног ротационог тела.

22. Једнакокраки трапез чија је висина 12, крак 13, а средња линија 15, ротира око своје мање основице. Одредити запремину тако добијеног обртног тела.

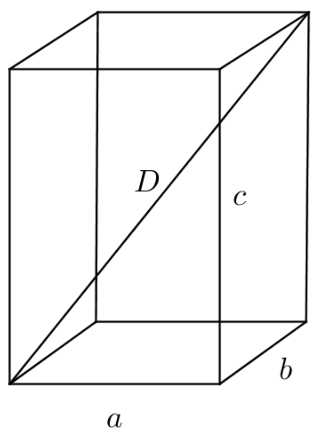
Решења задатака

1. Однос дужина ивица квадра је $a:b:c = 1:2:5$ (слика 1), па је $a = t$, $b = 2t$, $c = 5t$. Како је дијагонала квадра $D = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$, следи да је

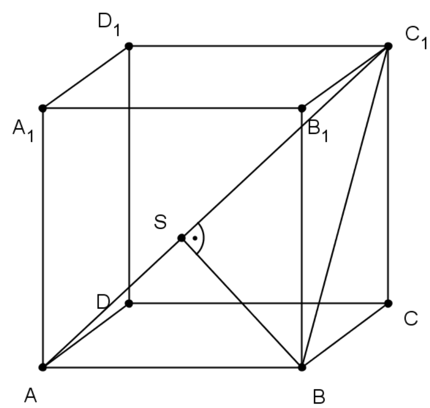
$$D = \sqrt{t^2+4t^2+25t^2} \Leftrightarrow 5\sqrt{6} = \sqrt{30}t \Leftrightarrow t = \sqrt{5}.$$

Према томе је $a = \sqrt{5}$, $b = 2\sqrt{5}$, $c = 5\sqrt{5}$, па је површина квадра

$$P = 2(ab+ac+bc) = 2(10+25+50) = 170.$$



Слика 1



Слика 2

2. Како је дужина ивице коцке 1, онда је дијагонала $AC_1 = \sqrt{3}$. Такође, BC_1 је дијагонала квадрата BCC_1B_1, па је $BC_1 = \sqrt{2}$. Посматрајући $\triangle BC_1S$ и $\triangle SAB$ (слика 2), долазимо до система

$$\begin{cases} BS^2 + AS^2 = 1, \\ BS^2 + (\sqrt{3} - AS)^2 = 2, \end{cases}$$

чијим решавањем добијамо да је $AS = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ и $BS = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

3. Посматрамо $\triangle AB_1D_1$ (слика 3). Ако је дужина ивице дате коцке a, уочавамо да је $AB_1 = AD_1 = B_1D_1 = a\sqrt{2}$, јер су то дијагонале квадрата који представљају стране коцке. Према томе, $\triangle AB_1D_1$ је једнакостраничан, па је $\measuredangle B_1AD_1 = \dfrac{\pi}{3}$.

4. Присетимо се тврђења косинусне теореме: за троугао са страницама дужина a, b и c, важи да је

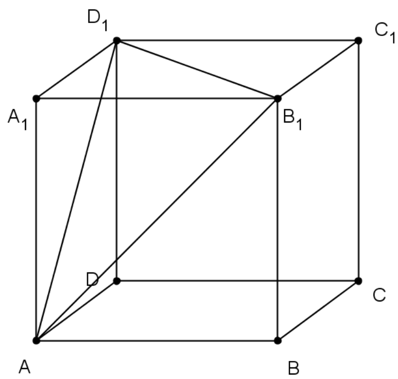
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma,$$

где је γ угао наспрам странице дужине c. Одатле, за основу дате призме (слика 4) важи да је

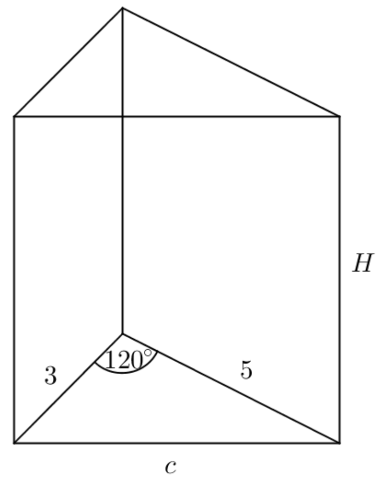
$$c^2 = 3^2 + 5^2 - 2\cdot 3\cdot 5\cdot \cos 120^\circ \Leftrightarrow c^2 = 49 \Leftrightarrow c = 7.$$

Површина највеће бочне стране је $c \cdot H = 35$, па је одатле $H = 5$, а површина омотача те призме је

$$M = 3\cdot 5 + 5\cdot 5 + 7\cdot 5 = 75.$$



Слика 3



Слика 4

5. На слици 5 приказан је троугао који формирају висина пирамиде H, њена изводница s и половина дијагонале квадрата странице x која је у основи призме. Из сличности одговарајућих правоуглих троуглова следи да је

$$H : \frac{x\sqrt{2}}{2} = \frac{3H}{4} : \frac{x_1\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x_1 = \frac{3x}{4} \Leftrightarrow B_1 = \frac{9B}{16},$$

$$H : \frac{x\sqrt{2}}{2} = \frac{H}{2} : \frac{x_2\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x_2 = \frac{x}{2} \Leftrightarrow B_2 = \frac{B}{4},$$

$$H : \frac{x\sqrt{2}}{2} = \frac{H}{4} : \frac{x_3\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x_3 = \frac{x}{4} \Leftrightarrow B_3 = \frac{B}{16},$$

где су B_1, B_2, B_3 површине три добијена пресека. Тада је

$$S = B_1 + B_2 + B_3 = \frac{9B}{16} + \frac{B}{4} + \frac{B}{16} = \frac{7B}{8},$$

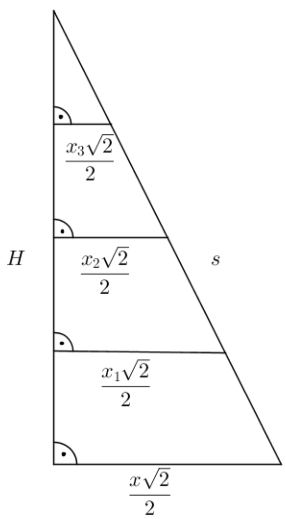
па је $B = \dfrac{8S}{7}$.

6. Правилан тетраедар странице a је правилна тространа пирамида, при чему је страница једнакостраничног троугла, који представља базу, дужине a и све изводнице су дужине a (слика 6). Према томе, површина правилног тетраедра је збир површина 4 подударна једнакостранична троугла тј.

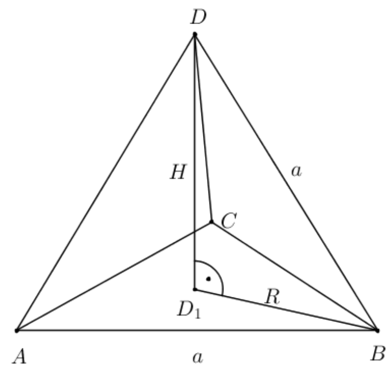
$$P = 4 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = a^2\sqrt{3}.$$

Подножје висине тетраедра је центар круга описаног око једнакостраничног троугла у основи, па је $R = BD_1 = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. Из $\triangle BDD_1$ следи да је

$$H = DD_1 = \sqrt{a^2 - R^2} = \sqrt{a^2 - \frac{3a^2}{9}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$



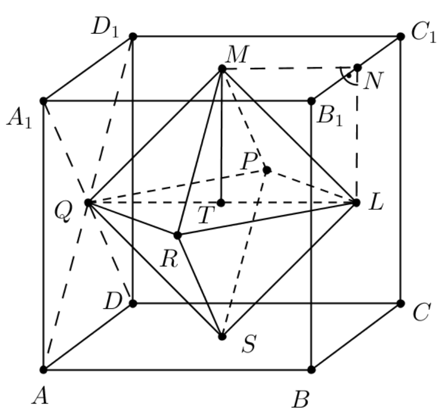
Слика 5



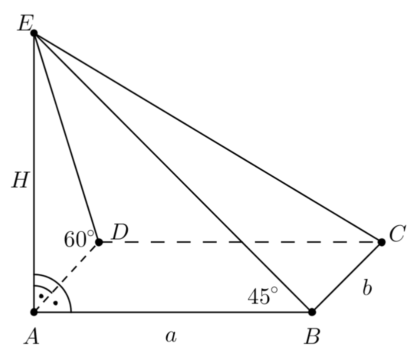
Слика 6

Према томе, ако је B површина базе,

$$V = \frac{B \cdot H}{3} = \frac{1}{3}\frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}.$$



Слика 7



Слика 8

7. Октаедар чине две исте правилне четворостране пирамиде, чије основне ивице и изводнице имају једнаке дужине (слика 7). Како је $MN = LN = \frac{a}{2}$, из $\triangle MNL$ следи да је

$$ML = \sqrt{MN^2 + LN^2} = \sqrt{2 \cdot \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Површина октаедра је сума површина 8 једнакостраничних троуглова дужина странице $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$, тј.

$$P = 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = a^2\sqrt{3}.$$

Запремина октаедра биће једнака двострукој запремини горе поменуте четворостране пирамиде. Уочимо да је $MT = \frac{a}{2}$ висина те пирамиде, па је

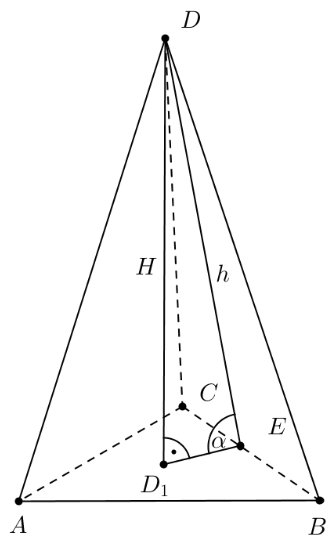
$$V = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{a}{2} \cdot \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{a^3}{6}.$$

8. Како је $\triangle ABE$ једнакокрако правоугли (слика 8) видимо да је $a = H$. У $\triangle ADE$ може се уочити да је

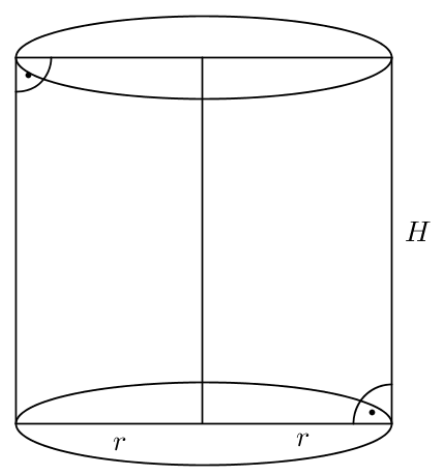
$$\frac{b}{H} = \mathrm{ctg}60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow b = \frac{H\sqrt{3}}{3}.$$

Одатле је

$$V = \frac{abH}{3} = \frac{H^3\sqrt{3}}{9} = 27\,\mathrm{cm}^3.$$



Слика 9



Слика 10

9. Како је однос површине омотача и површине основе $\sqrt{3} : 1$, то је (слика 9)

$$\frac{3ah}{2} : \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3} : 1 \Leftrightarrow \frac{3a^2}{4} = \frac{3ah}{2} \Leftrightarrow h = \frac{a}{2}.$$

Дуж D_1E представља полупречник круга уписаног у једнакостраничан $\triangle ABC$, па је $D_1E = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$. Коначно је

$$\cos\alpha = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{6}}{\frac{a}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

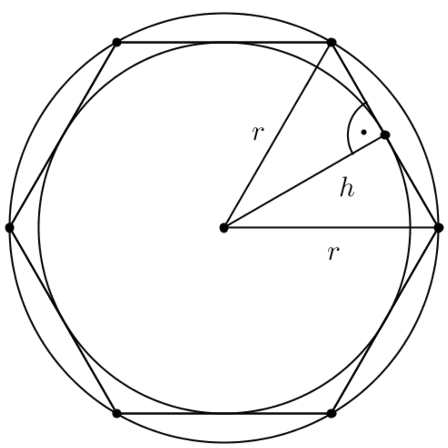
10. Како је осни пресек ваљка (слика 10) квадрат, онда је $H = 2r$, где је r полупречник основе, а H висина ваљка. Одатле је

$$V = B \cdot H = r^2\pi H = 2r^3\pi = 54\pi \Leftrightarrow r^3 = 27 \Leftrightarrow r = 3.$$

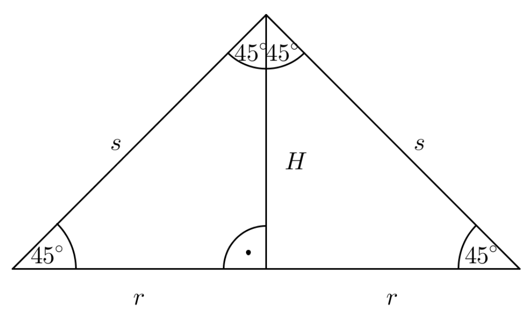
Одатле је $H = 6$.

11. Ако је је r полупречник основе, а H висина ваљка, онда је $H : r = 4 : 1$, па је $H = 4r$. Даље је $V = r^2\pi H = 4r^3\pi$, одакле је $r = \sqrt[3]{\dfrac{V}{4\pi}}$. Површина ваљка је

$$P = 2r^2\pi + 2r\pi H = 2r\pi(r + H) = 2r\pi \cdot 5r = 10r^2\pi = 10\pi \left(\frac{V}{4\pi}\right)^{\frac{2}{3}}.$$



Слика 11



Слика 12

12. Висине оба ваљка и шестостране призме су једнаких дужина, па је однос запремина ова два ваљка однос површина њихових основа (слика 11). Нека је r полупречник основе спољашњег ваљка. Уочавамо да је h полупречник основе унутрашњег ваљка, а уједно и висина једнакостраничног троугла странице r, па је $h = \frac{r\sqrt{3}}{2}$. Одатле је

$$V_1 : V_2 = r^2\pi H : h^2\pi H = r^2 : h^2 = r^2 : \frac{3r^2}{4} = 1 : \frac{3}{4} = 4 : 3.$$

13. На осном прсеку (слика 12) уочавамо да је $H = r = 5$ и да је $s = r\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$. Сада је

$$P = r^2\pi + rs\pi = (r + s)r\pi = (5 + 5\sqrt{2})5\pi = 25(1 + \sqrt{2})\pi\,\mathrm{cm}^2.$$

14. Површина омотача купе је $M = rs\pi = 110\pi$ и она представља десетину површине круга полупречника s (слика 13), па је

$$s^2\pi = 10M = 1100\pi \Leftrightarrow s = 10\sqrt{11}.$$

Обим основе купе је десетина обима круга полупречника s, па је

$$2r\pi = \frac{2s\pi}{10} \Leftrightarrow r = \sqrt{11}.$$

Сада је

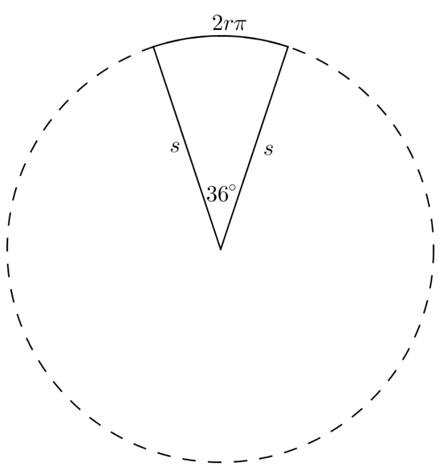
$$H = \sqrt{s^2 - r^2} = \sqrt{1100 - 11} = 33,$$

па је

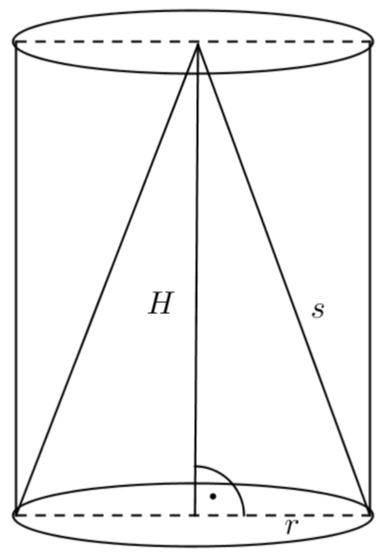
$$V = \frac{r^2\pi H}{3} = \frac{363\pi}{3} = 121\pi\,\mathrm{cm}^3$$

и

$$P = r^2\pi + rs\pi = (r+s)r\pi = 11\sqrt{11}\cdot\sqrt{11}\pi = 121\pi\,\mathrm{cm}^2.$$



Слика 13



Слика 14

15. Како је $H : s = 12 : 13$ (слика 14), онда је $H = 12x$ и $s = 13x$ и одатле је

$$r = \sqrt{s^2 - r^2} = \sqrt{169x^2 - 144x^2} = 5x.$$

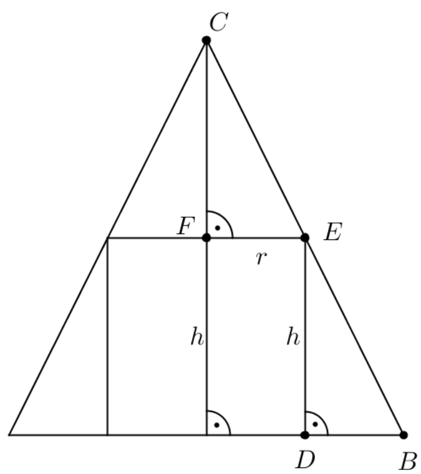
Следи да је

$$\frac{P_V}{P_K} = \frac{2r^2\pi + 2r\pi H}{r^2\pi + rs\pi} = \frac{r\pi(2r + 2H)}{r\pi(r+s)} = \frac{34x}{18x} = \frac{17}{9}.$$

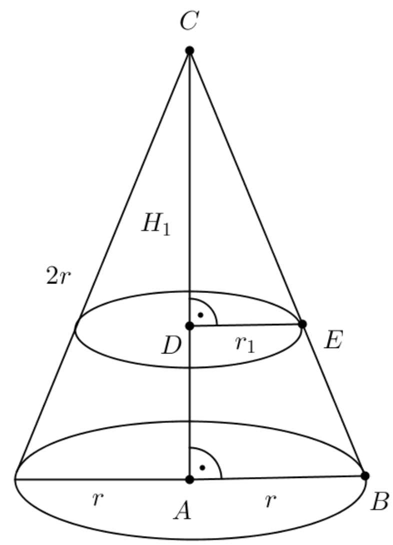
16. Означимо висину ваљка са h и са r полупречник његове основе (слика 15). Тада је површина омотача ваљка $M = 2r\pi h$. Важи да је $\measuredangle FCE = \measuredangle DEB$ и $\measuredangle FEC = \measuredangle DBE$, јер су у питању углови са паралелним крацима. Одатле је $\triangle EFC \overset{(\text{УУУ})}{\sim} \triangle BDE$. Како је $CF = 2R - h$ и $DB = R - r$, онда је

$$CF : DE = FE : DB \Leftrightarrow (2R - h) : h = r : (R - r) \Leftrightarrow h = 2(R - r).$$

Сада је $M = 4r(R-r)\pi$. Површину омотача M сада посматрамо као функцију полупречника r и можемо одредити њен први извод, тј. $M' = (4R-8r)\pi$. Максимум функције M постиже се за оно r за које је $4R-8r=0$, односно за $r = \dfrac{R}{2}$. Одатле је висина уписаног ваљка за коју је површина његовог омотача максимална $h = 2\left(R - \dfrac{R}{2}\right) = R$.



Слика 15



Слика 16

17. Дуж AC је висина купе, а уједно и висина једнакостраничног троугла странице $2r$ (слика 16), па је $h = \dfrac{2r\sqrt{3}}{2} = r\sqrt{3}$. Нека је $DE = r_1$ и $CD = H_1$. Уочавамо да је $\triangle ABC \overset{(\text{УУУ})}{\sim} \triangle DEC$, па је

$$AC : CD = AB : DE \Leftrightarrow r\sqrt{3} : H_1 = r : r_1 \Leftrightarrow H_1 = r_1\sqrt{3}.$$

Ако је V запремина купе, а V_1 запремина одсечака, онда је

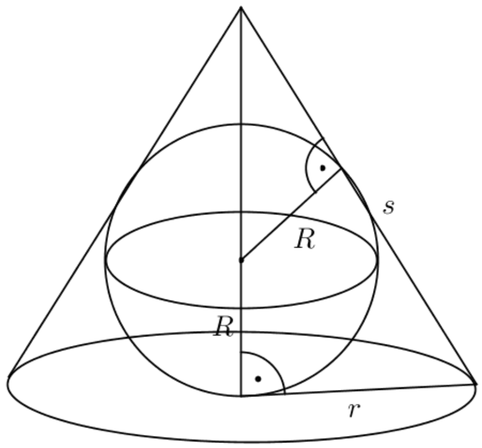
$$V = 2V_1 \Leftrightarrow \frac{r^3\pi\sqrt{3}}{3} = 2\cdot\frac{r_1^3\pi\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow r^3 = 2r_1^3 \Leftrightarrow r_1 = \frac{r}{\sqrt[3]{2}}.$$

Одатле је $H_1 = \dfrac{r\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}}$.

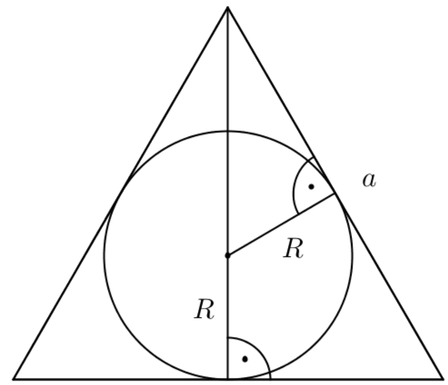
18. Није тешко уочити (слика 17) да је $s = \sqrt{12^2+5^2} = 13$. Такође, из сличности правоуглих троуглова са слике 17 следи да је

$$r : s = R : (h-R) \Leftrightarrow 5 : 13 = R : (12-R) \Leftrightarrow R = \frac{10}{3}.$$

Одатле је запремина лопте $V = \dfrac{4}{3}R^3\pi = \dfrac{4000}{81}\pi$.



Слика 17



Слика 18

19. Нека је a основна ивица тростране призме. Пошто сфера полупречника R додирује све стране призме, онда је $H = 2R$ висина призме. Ако погледамо пресек са равни која је паралелна основи призме и садржи центар сфере (слика 18), видимо да је R полупречник кружнице уписане у једнакостраничан троугао странице a, па је $R = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$ и $H = 2R = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. Тада је површина призме

$$P_P = 2 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + 3 \cdot a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2},$$

површина сфере је

$$P_S = 4R^2\pi = 4 \cdot \frac{3a^2}{36}\pi = \frac{a^2\pi}{3}.$$

па је

$$\frac{P_P}{P_S} = \frac{\frac{3a^2\sqrt{3}}{2}}{\frac{a^2\pi}{3}} = \frac{9\sqrt{3}}{2\pi}.$$

20. Приметимо (слика 19) да ,,мале“ купе, тј. купе чији су осни пресеци $\triangle BFA$ и $\triangle BFE$, имају једнаке запремине. Запремина датог ротационог тела је разлика запремине ,,велике“ купе чији је осни пресек $\triangle CDE$ и двостукој запремини купе чији је осни пресек $\triangle BFE$, односно $V = V_1 - 2V_2$. Уочавамо да је $AE = 2 \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$, па је

$$V_1 = \frac{1}{3}(AD)^2\pi AE = \frac{1}{3}a^2\pi \cdot a\sqrt{3} = \frac{a^3\sqrt{3}\pi}{3}.$$

Такође је

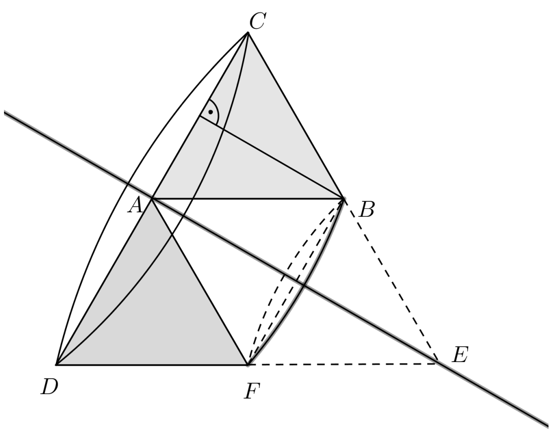
$$V_2 = \frac{1}{3}\left(\frac{a}{2}\right)^2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}\pi = \frac{a^3\sqrt{3}\pi}{24},$$

па је

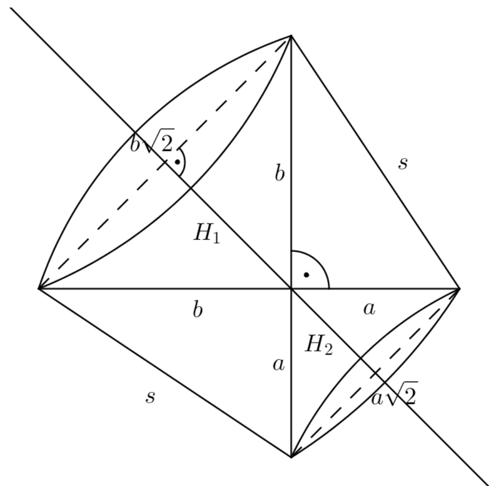
$$V = \frac{a^3\sqrt{3}\pi}{3} - 2 \cdot \frac{a^3\sqrt{3}\pi}{24} = \frac{a^3\sqrt{3}\pi}{4}.$$

Површина је

$$P = \underbrace{a^2\pi + \left(\frac{a}{2}\right)^2\pi}_{B_1+B_2} + \underbrace{a\left(a+\frac{a}{2}\right)\pi}_{M} = \frac{11\pi a^2}{4}.$$



Слика 19



Слика 20

21. Подсетимо се да је запремина зарубљене купе $V = \dfrac{H\pi}{3}(R^2 + r^2 + Rr)$, где је H висина зарубљене купе, а R и r су полупречници основа. Уочимо (слика 20) да је пречник једне основе дијагонала квадрата странице b, па је полупречник $R = \dfrac{b\sqrt{2}}{2}$. Слично је $r = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ полупречник друге основе. Такође је $H_1 = \sqrt{b^2 - R^2} = \dfrac{b\sqrt{2}}{2}$ и $H_2 = \sqrt{a^2 - r^2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. Према томе је

$$V_Z = \frac{(H_1 + H_2)\pi}{3}\left(\left(\frac{b\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{b\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{a\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{a+b}{6\sqrt{2}}\pi(a^2 + b^2 + ab).$$

Запремину V ротационог тела добијамо тако што од V_Z одузмемо запремине V_{K_1} и V_{K_2} купа које се налазе унутар зарубљене купе. Како је

$$V_{K_1} = \frac{R^2\pi H_1}{3} = \frac{b^3\pi\sqrt{2}}{12}$$

и

$$V_{K_2} = \frac{r^2\pi H_2}{3} = \frac{a^3\pi\sqrt{2}}{12}.$$

Коначно је

$$V = V_Z - V_{K_1} - V_{K_2} = \frac{a+b}{6\sqrt{2}}\pi(a^2+b^2+ab) - \frac{b^3\pi\sqrt{2}}{12} - \frac{a^3\pi\sqrt{2}}{12} = \frac{\pi\sqrt{2}ab(a+b)}{6}.$$

22. Решење: $V = 2400\pi$.

За сва питања можете се обратити путем мејла teodora.trifunovic@gmail.com.